Sequências de números reais

Uma lista ordenada e infinita de números reais

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$$

Notações: $(x_n)_n$, (x_n), $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$, $\{x_n\}_n$

x_n: termo geral

Exemplos: 1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots = (n)_{n=1}^{\infty}$

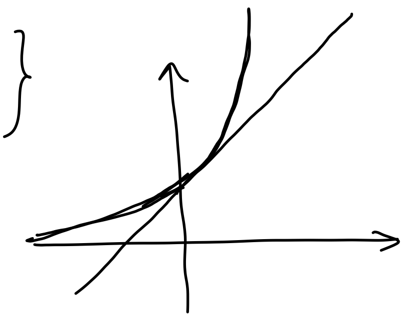
$n \to \infty$ a seq. é divergente

2) $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \,, \quad n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$$

a seq. é convergente.

3) $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \dots\right\}$



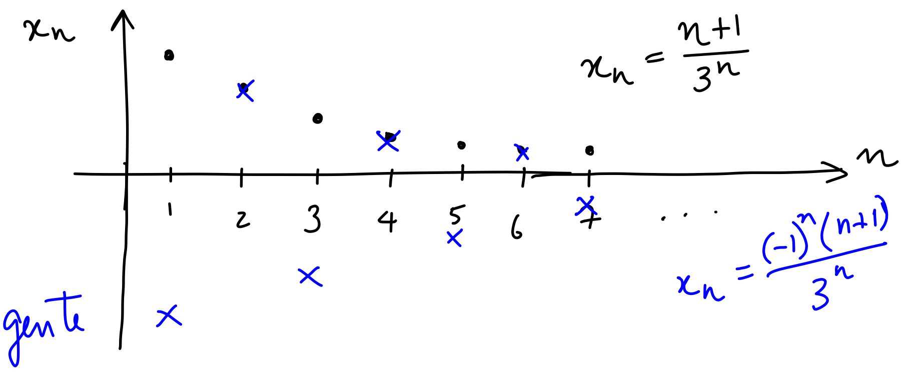
$$\frac{2}{3} > \frac{3}{9} > \frac{4}{27} > \frac{5}{81} > \dots \qquad n+1 < 3^n, \ \forall n \geq 1$$

(decrescente)

$$\frac{n+1}{3^n} > 0$$

$$\frac{n+1}{3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{convergente}$$



4) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots\right\} = \left\{\frac{2^n}{3^n}\right\}$

$$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} ?$$

5) $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots\right\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+2)}{5^n}\right\}$

$\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5^n}\right\}$ é convergente pelo mesmo motivo que 3).

6) $\pi = 3{,}14159265359\dots$

$x_n =$ n-ésimo dígito decimal de π.

$\{1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 9, \dots\}$ é divergente.

7) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ (Fibonacci)

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. divergente.

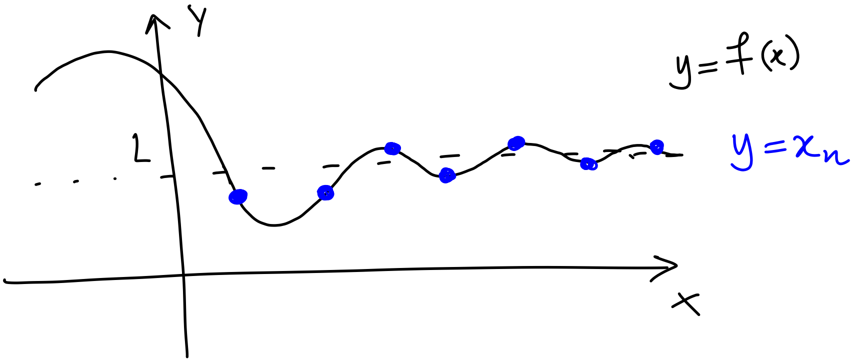
Uma seq. x_n tem limite L se seus termos se aproximam de L quando n fica arbitrariamente grande.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow{n \to \infty} L$$

Quando o limite existe, dizemos que a seq. é convervente. Dizemos que a seq. é divergente caso contrário.

Teorema: Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $f(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L.$$



Teorema: Se $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ e f contínua, então

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(L).$$

Exemplo: 1) $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$\therefore \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \operatorname{sen}(0) = 0$$

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ é contínua em seu domínio.

$f(n) = \frac{\ln n}{n} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Exercício: Para quais valores de r a seq. $\{r^n\}$ é convergente?